|  |  |
| --- | --- |
| Gerb-BMSTU_01 | **Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  **высшего образования**  **«Московский государственный технический университет**  **имени Н.Э. Баумана**  **(национальный исследовательский университет)»**  **(МГТУ им. Н.Э. Баумана)** |

ФАКУЛЬТЕТ *Робототехники и комплексной автоматизации*

КАФЕДРА *Системы автоматизированного проектирования (РК-6)*

**ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ**

по дисциплине: «Вычислительная математика»

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент |  | Шашко Олег Владимирович |
| Группа |  | РК6-51Б |
| Тип задания |  | лабораторная работа |
| Тема лабораторной работы |  | Интерполяция Лагранжа |

Студент **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Шашко О.В.**

*подпись, дата фамилия, и.о.*

Преподаватель **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Соколов А.П.**

*подпись, дата фамилия, и.о.*

*Москва, 2022 г.*

Оглавление

[Задание на лабораторную работу 3](#_Toc32399212)

[Цель выполнения лабораторной работы 3](#_Toc32399213)

[Выполненные задачи 3](#_Toc32399214)

[1. Интерполирование полиномами Лагранжа 4](#_Toc32399215)

[2. @Название раздела в соответствии с задачей 2@ 4](#_Toc32399216)

[Заключение 4](#_Toc32399217)

[Список использованных источников 4](#_Toc32399218)

# Задание на лабораторную работу

1.1 Требования к знаниям для выполнения

Для выполнения лабораторной̆ работы обучающийся должен обладать знаниями:  
– владеть навыками разработки программного обеспечения на языке Python (рекомендуется) или С++ на базовом уровне;  
– владеть навыками использования программных инструментов: numpy, matplotlib; – знать понятия: интерполяция, интерполяционный̆ полином Лагранжа, принципы интерполяции кубическими сплайн-функциями.

1.2 Интерполяция Лагранжа (вариант 1)

Интерполяция Лагранжа является одним из самых важных численных методов и лежит в основе многих методов численного дифференцирования и интегрирования. Точность интерполяции полиномами Лагранжа зависит не только от максимальной̆ степени выбранного подмножества полиномов, но и от расположения узлов. Очевидный̆, казалось бы, выбор равномерно расположенных узлов может приводить к неожиданным проблемам. Одним из примеров является так называемый̆ эффект Рунге, который̆ выражается в большой̆ осцилляции аппроксимированного полинома вблизи конечных узлов отрезка интерполирования и который̆ предлагается исследовать в базовой̆ части. В продвинутой̆ части предлагается исследовать влияние расположения узлов и их количества на интерполяцию Лагранжа более систематически, используя случайные функции, сгенерированные с помощью аппроксимации Паде. [ссылку на лекции или методичку следует добавить]

Задача 1 (интерполирование полиномами Лагранжа)

(1) ,

где 𝑥 ∈ [−1; 1]. Также дана рациональная функция, известная как аппроксимация Паде:

, где 𝑥 ∈ [−1; 1].

Требуется (базовая часть):  
1. Разработать функцию l\_i(i, x, x\_nodes), которая возвращает значение 𝑖-го базисного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x\_nodes, в точке 𝑥.

2. Написать функцию L(x, x\_nodes, y\_nodes), которая возвращает значение интерполяционного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x\_nodes и ординатами y\_nodes, в точке 𝑥.

3. Для равномерно расположенных узлов вывести на экран одновременно графики 𝑓(𝑥) и полученного интерполяционного полинома 𝐿(𝑥) для следующих количеств узлов: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23. В результате это должно дать 7 пар графиков. Опишите, что наблюдается при увеличении количества узлов?

4. Повторить предыдущий̆ пункт для чебышевских узлов. В чем разница между интерполяцией̆ Лагранжа функции 𝑓(𝑥) на основе равномерно расположенных узлов и чебышевских? Сделать выводы.

Требуется (продвинутая часть):

1. Сгенерировать 100 функции 𝑓𝑛,𝑚(𝑥), где целые степени 𝑛,𝑚 ∈ [7;15] и вещественные коэффициенты 𝑎𝑗 , 𝑏𝑘 ∈ [0; 1] генерируются случайным образом для каждой̆ из функции.

2. Для нескольких из сгенерированных функций вывести на экран одновременно графики 𝑓𝑛,𝑚(𝑥) и соответствующего интерполяционного полинома 𝐿(𝑥), построенного по 𝑁 равномерно расположенным узлам, где 𝑁 выбирается по собственному усмотрению, но должно быть не меньше 5. На том же графике выведите 𝐿(𝑥), построенного по 𝑁 чебышевским узлам.

3. Для каждой̆ из функции, сгенерированных в предыдущем пункте, найдите интерполяционные полиномы 𝐿(𝑥), построенные по 𝑁 ∈ {1,2,...,30} равномерно расположенным узлам и чебышевским узлам. Для каждого 𝑁 рассчитаете расстояние между 𝑓𝑛,𝑚 (𝑥) и 𝐿(𝑥) в лебеговом пространстве 𝐿∞ .2 Рассмотрите несколько графиков зависимости этого расстояния для равномерных и чебышевских узлов от 𝑁 и сделаете по ним вывод.3 Добавьте в отчет один характерный̆ график, который̆ наглядно демонстрирует верность вашего вывода.

4. Объясните, что такое аппроксимация Паде и до какой̆ степени предложенный̆ метод генерации случайных функций 𝑓𝑛,𝑚(𝑥) позволяет обобщить выводы предыдущего пункта на произвольные функции.

# Цель выполнения лабораторной работы

**Цель выполнения лабораторной работы** – реализовать алгоритм интерполяции произвольной функции методом Лагранжа в зависимости от заданного числа узлов; рассмотреть два вида узлов − чебышевские и равномерно расположенные, на примере функции Рунге оценить степень точности приближения в обоих случаях; рассмотреть влияние выбора числа точек интерполяции и двух типов на примере функции Паде.

# Выполненные задачи

* **Задача 1 (интерполирование полиномами Лагранжа)**

1. Была разработана функция l\_i(i, x, x\_nodes), которая возвращает значение 𝑖-го базисного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x\_nodes, в точке 𝑥.
2. Была написана функция L(x, x\_nodes, y\_nodes), которая возвращает значение ин- терполяционного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x\_nodes и ординатами y\_nodes, в точке 𝑥.
3. Для равномерно расположенных узлов было выведено на экран одновременно графики 𝑓(𝑥) и полученного интерполяционного полинома 𝐿(𝑥) для следующих количеств узлов: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23 и описано что наблюдалось при росте количества узлов.
4. Был повторен предыдущий̆ пункт для чебышевских узлов и сделаны выводы, в чем разница между интерполяцией̆ Лагранжа функции 𝑓(𝑥) на основе равномерно расположенных узлов и чебышевских.
5. Было сгенерировано 100 функции 𝑓𝑛,𝑚(𝑥), где целые степени 𝑛,𝑚 ∈ [7;15] и веще- ственные коэффициенты 𝑎𝑗 , 𝑏𝑘 ∈ [0; 1] генерируются случайным образом для каждой из функции
6. Для нескольких из сгенерированных функций выведены на экран одновременно графики 𝑓𝑛,𝑚(𝑥) и соответствующего интерполяционного полинома 𝐿(𝑥), построенного по 𝑁 равномерно расположенным узлам, где 𝑁 выбирается по собственному усмотрению, но должно быть не меньше 5. На том же графике выведено 𝐿(𝑥), построенного по 𝑁 чебышевским узлам
7. Для каждой из функции, сгенерированных в предыдущем пункте, найдены интерполяционные полиномы 𝐿(𝑥), построенные по 𝑁 ∈ {1,2,...,30} равномерно расположенным узлам и чебышевским узлам. Для каждого 𝑁 рассчитано расстояние между и 𝑁 в лебеговом пространстве . Рассмотрено несколько графиков зависимости этого расстояния для равномерных и чебышевских узлов от N и сделаны по ним вывод.

**1. Интерполирование полиномами Лагранжа**

1. Пункт 1 - Разработать функцию l\_i(i, x, x\_nodes)

Для начала заметим, что эта функция нам понадобится для двух видов сетки: для равномерного распределения и для чебышевских узлов, соответственно целесообразно будет передавать в аргументах функции еще один параметр – наши точки. В таком случае наша реализация будет более универсальной и позволит избежать дублирования кода.

i-й полином Лагранжа находится по формуле:

Программная реализация функции представлена на листинге 1.

def l\_i(x, n, j, values: list):  
 p1 = 1  
 p2 = 1  
 for i in range(0, n + 1):  
 if i != j:  
 p1 \*= x - values[i]  
 p2 \*= values[j] - values[i]  
 return p1 / p2

Листинг 1

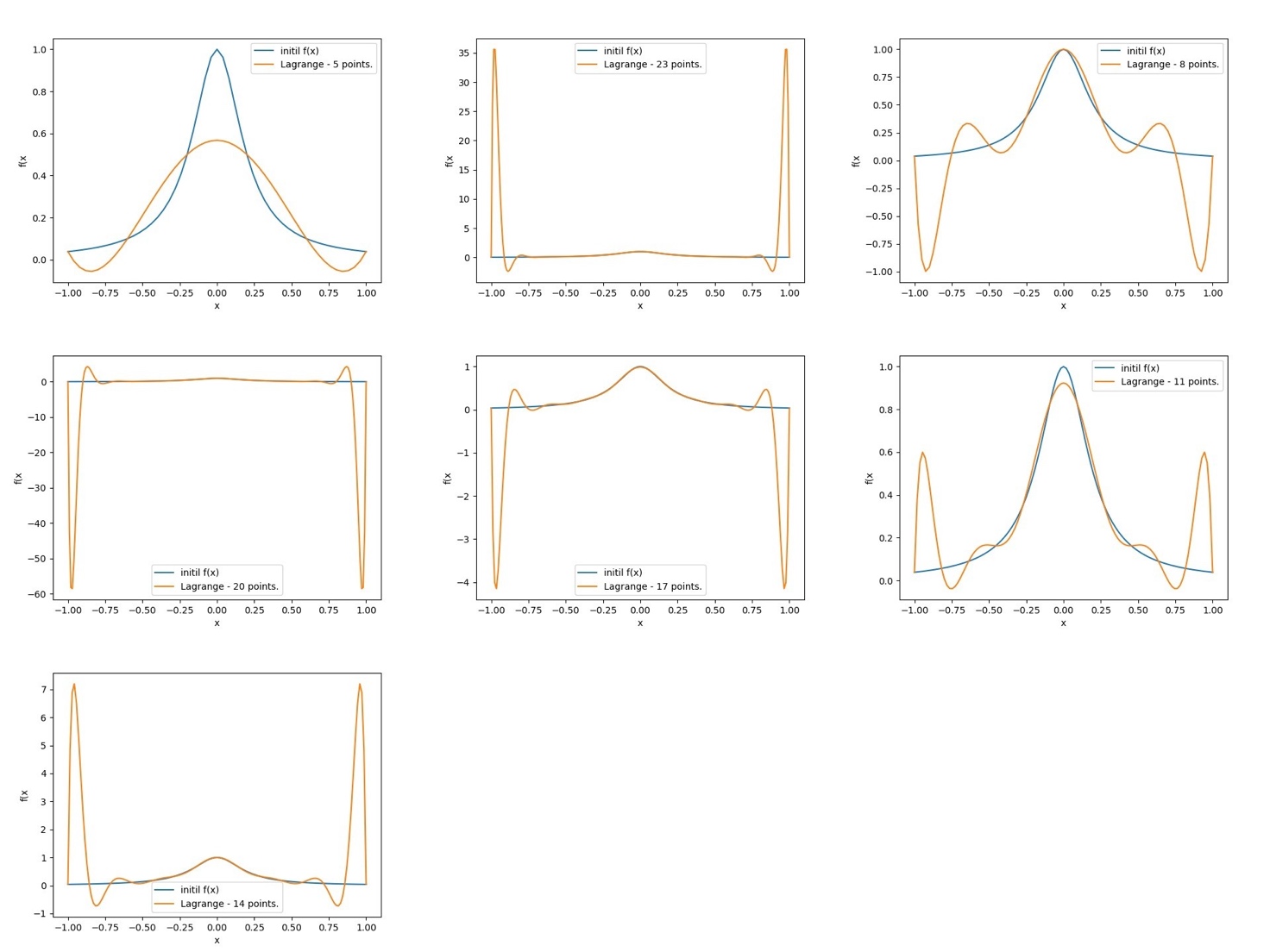
1. Пункт 2 - Написать функцию L(x, x\_nodes, y\_nodes)

Здесь, как и в предыдущем пункте, нам понадобится две функции

Значение интерполяционного полинома Лагранжа находится по формуле:

3. Пункт 3 - вывести на экран одновременно графики.

Построим 7 пар графиков функций, каждая из которых будет содержать график исходной функции и график аппроксимации Лагранжа (рис 1) для равномерно распределенных на отрезке узлов. Число точек для построения графиков возьмём в 10 раз больше, чем число узлов интерполяции (50, 80 и т.д.)

Рисунок 1

Как мы видим, при увеличении числа узлов увеличивается и точность интерполяции, однако все равно присутствует большая погрешность метода, связанная с выбором равномерно распределенных узлов. Из этого мы можем сделать вывод, что для данной функции равномерная сетка является не лучшим вариантом.

Эти скачки по бокам (так называемая осцилляция) – феномен Рунге. Возникает при [интерполяции](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D1%8F%D1%86%D0%B8%D1%8F) [полиномами](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%BE%D0%BC) высоких степеней. Иначе говоря, при росте степени полинома погрешность интерполяции стремится к бесконечности.

Задача 4 - повторить предыдущий̆ пункт для чебышевских узлов.

Рассмотрим чебышевскую сетку, 7 пар графиков представлены на рисунке 2. Сделать это возможно поскольку изначально в Задаче 1 и Задаче 2 реализация не опиралась на выбор того или иного типа узлов.

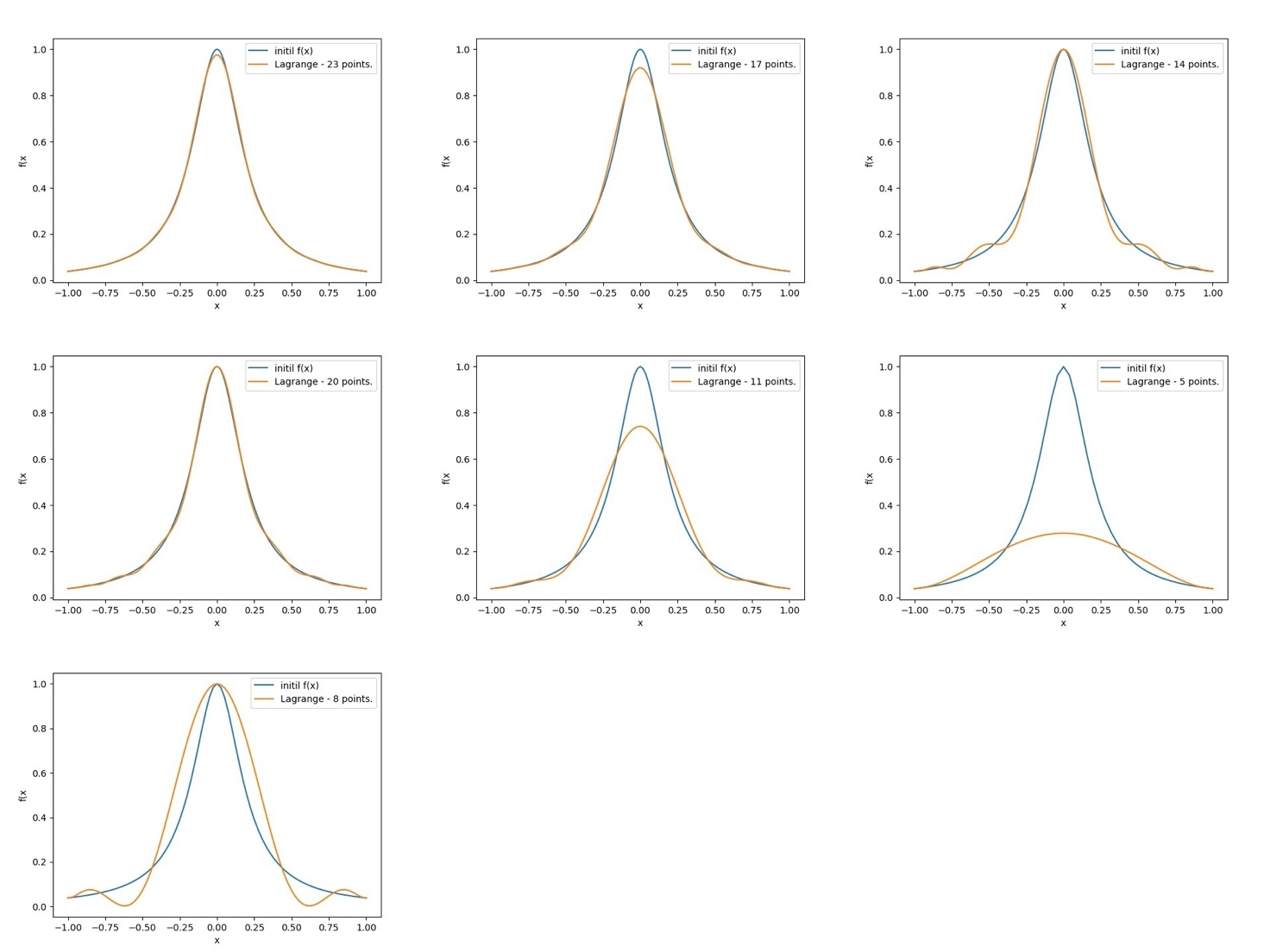


Рисунок 2

Мы наблюдаем аналогичную картину, как и с интерполяций по равномерному распределению – при увеличении числа узлов возрастает точность. Однако в случае с чебышевскими узлами погрешность много меньше чем в случае с использованием равномерного распределения.

Задача 1(продвинутая) – сгенерировать 100 функций

Для генерации рандомных вещественных чисел воспользуемся функцией из библиотеки random – random(). При вызове этой функции без аргументов будет сгенерировано одно псевдорандомное вещественное число внутри отрезка [0; 1].

Для генерации целых чисел опять же воспользуемся библиотекой random и методом randint(a, b), где a,b – границы отрезка, на котором генерируются псевдорандомные числа.

Задача 2(продвинутая) - Для нескольких из сгенерированных функций вывести на экран одновременно графики

Для начала нам необходимо выбрать узлы N, по которым мы будем строить график. Возьмем 4 точки - [3, 8, 13, 18, 23] и построим по ним график(рисунок 3).

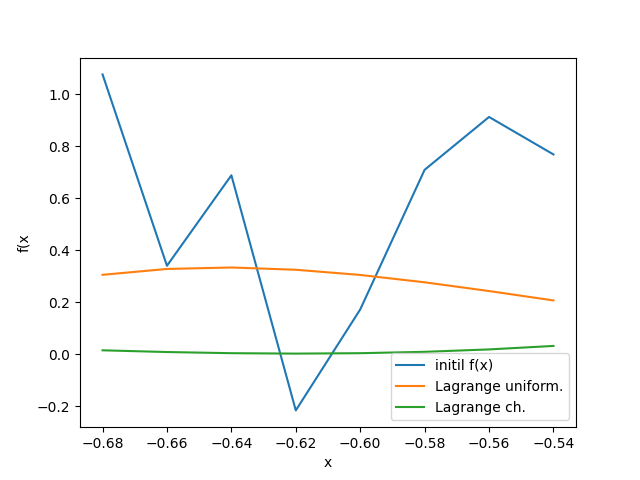
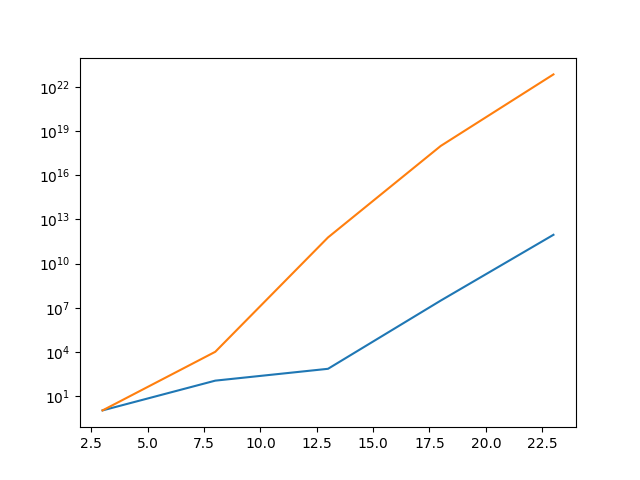


Рисунок 3

Задача 3(продвинутая) - найдите интерполяционные полиномы 𝐿(𝑥).

В лебеговых пространствах под расстоянием подразумевается норма ||𝑔1 − 𝑔2||. В пространстве нормой является равномерная норма, которую можно определить как , предполагая, что функция 𝑔(𝑥) рассматривается на интервале 𝑥 ∈ [𝑎; 𝑏].

На рисунке 4 изображен один из характерных графиков, демонстрирующий рост разности между исходной функцией и ее аппроксимаций в зависимости от числа узлов. Из этого можно сделать вывод, что при увеличении числа узлов мы получаем значительный рост погрешности приближения. 

# @Название раздела в соответствии с задачей 2@

@Описание проведенных работ, включая иллюстрации и ссылки на дополнительную литературу, если такая потребовалась@

# Заключение

@Выводы по выполненным работам, включая краткое заключение@

# Список использованных источников

1. **Фамилия И.О.** *Тема публикации, название книги, пособия.* [Электронный ресурс] // Наименование журнала. Организация, Город, Год, количество страниц[[1]](#footnote-1).

1. Оформляется согласно ГОСТ 7.1-2003 «Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления», и ГОСТ 7.82-2001 «Библиографическая запись. Библиографическое описание электронных ресурсов. Общие требования и правила составления» [↑](#footnote-ref-1)